<u>Acción Nº4 y 5</u>: Función logarítmica. Definición. Logaritmo de un número. Logaritmo decimal y logaritmo natural.

<u>Núcleo temático</u>: Función exponencial y logarítmica.

<u>Fecha</u>: Junio 2011 – Espacio de capacitación. CIE.

<u>Docente:</u> De Virgilio, Mara. Escuela Agropecuaria de Arrecifes. Junio 2011.

Adaptación situación extraída de los libros de ANAYA de Miguel de Guzmán.

<u>ACTIVIDAD INICIAL</u>:

- Se le presentará a los alumnos el siguiente juego. Se llevaran cuatro fichas como estas.

Se colocan las cuatro fichas en una bolsa no transparente y pasa un alumno al frente y saca una ficha al azar y los otros alumnos deben adivinar cual es la ficha haciendo el mínimo número de preguntas a las que se puedan responder con SI o NO.

Luego que desarrollemos el juego llegaremos a la conclusión que el número mínimo de preguntas es 2.

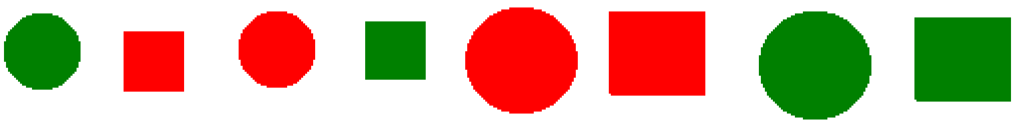
<u>Opciones de preguntas</u>:

1. ¿Es verde? ¿Es redonda?
2. ¿Es verde? ¿Es cuadrada?
3. ¿Es roja? ¿Es redonda?
4. ¿Es roja? ¿Es cuadrada?

Ahora anotamos en el pizarrón:

- 2 respuestas posibles.
- 4 fichas.
- 2 preguntas mínimas.

Ahora se les plantea a los alumnos el mismo juego, pero se le agregan a la bolsa 4 fichas más, ahora la bolsa tendrá 8 fichas como estas:



Luego que juguemos con las ocho fichas, nos damos cuenta que la cantidad de preguntas mínimas son 3:

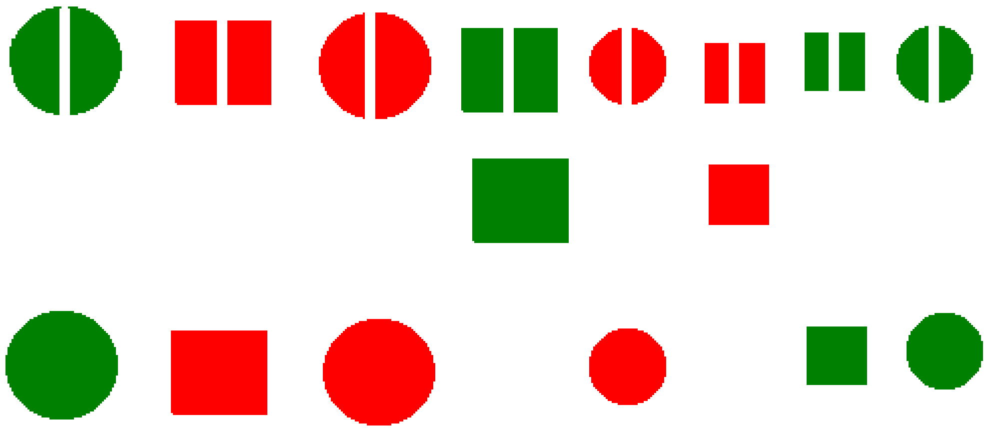
Opciones de preguntas:

1. ¿Es verde? ¿Es redonda? ¿Es pequeña?
2. ¿Es verde? ¿Es redonda? ¿Es grande?
3. ¿Es verde? ¿Es cuadrada? ¿Es pequeña?
4. ¿Es verde? ¿Es cuadrada? ¿Es grande?
5. ....
6. etc.

Ahora anotamos en el pizarrón:

- 2 respuestas.
- 8 fichas.
- 3 preguntas mínimas.

Ahora se les plantea a los alumnos el mismo juego, pero se agregan a la bolsa 8 más, ahora la bolsa tendrá 16 fichas como estas:



Luego que juguemos con las dieciséis fichas nos damos cuenta que la cantidad de preguntas mínimas es 4:

Opciones de preguntas:

1. ¿Es verde? ¿Es redonda? ¿Es grande? ¿Tiene raya blanca?
2. ¿Es roja? ¿Es redonda? ¿Es grande? ¿Tiene raya blanca?
3. ¿Es verde? ¿Es redonda? ¿Es pequeña? ¿Tiene raya blanca?
4. ¿Es roja? ¿Es redonda? ¿Es pequeña? ¿Tiene raya blanca? etc.

Anotamos en el pizarrón:

- 2 respuestas.
- 16 fichas.
- 4 preguntas mínimas.

ACTIVIDAD DE DESARROLLO:

Se les preguntará a los alumnos lo siguiente:

1. Si tenemos una ficha sola ¿cuántas serán las preguntas que se deben realizar?

Los alumnos contestaran que si tenemos una sola ficha no habrá que realizar ninguna pregunta.

Anotamos en el pizarrón:

- 2 respuestas.
- 1 ficha.
- 0 preguntas mínimas.

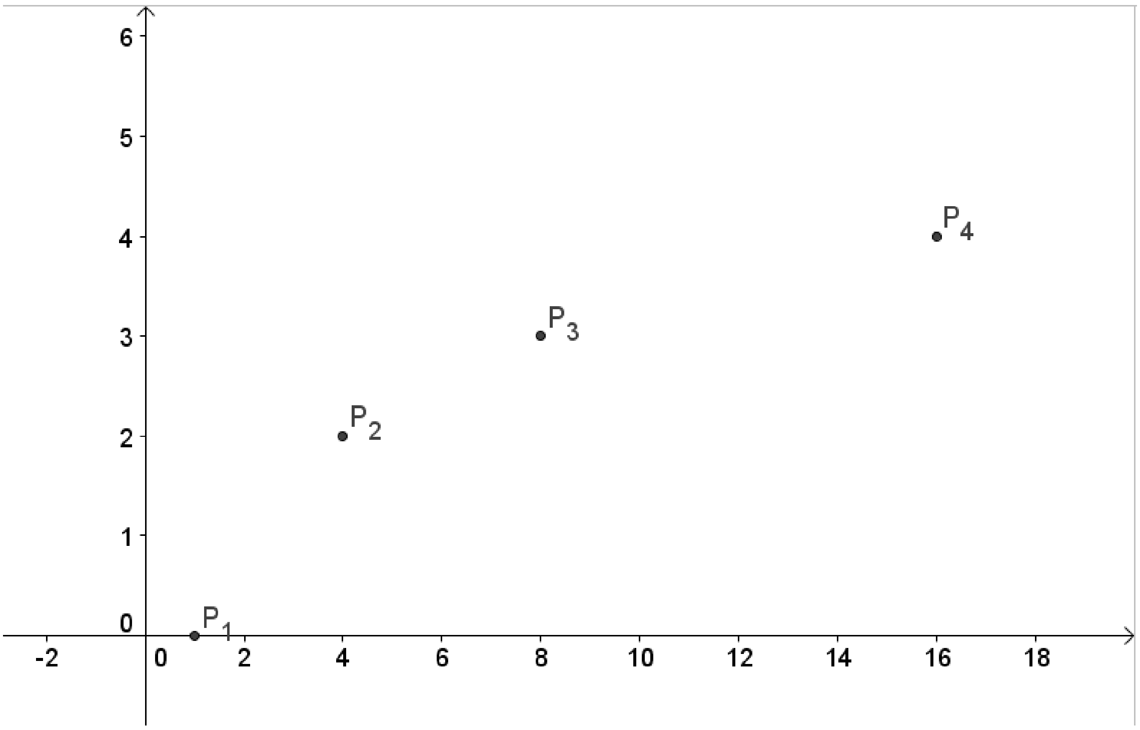
Ahora los alumnos deben gráficar una función con las anotaciones que hicimos en el pizarrón durante el transcurso del juego, incluida la última de 1 ficha.

Para esto realizamos la tabla:

Tomando como x la cantidad de fichas y como y la cantidad de preguntas mínimas.

x	y
1	0
4	2
8	3
16	4

Ahora realizamos la gráfica:



Se les dirá a los alumnos que busquen una relación entre los datos que tenemos para tratar de determinar la fórmula de la función de la gráfica.

Después que los alumnos piensen un rato, se llegará a la conclusión de que la relación que existe es:

$2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$

Tomamos como base de la potencia 2 que es el número de respuestas posibles.

El exponente es la cantidad de preguntas mínimas.

El resultado es la cantidad de fichas.

En símbolos seria:

$$2^y = x$$

Para resolver este tipo de funciones se toma el logaritmo:

$$\log_2 x = y \Rightarrow 2^y = x$$

Definición de logaritmo:

$$y = \log_2 x$$

Porque podemos observar que:

- Para $x = 4$ le corresponde $y = 2$ por que $2^2 = 4$
- Para $x = 8$ le corresponde $y = 3$ por que $2^3 = 8$
- Para $x = 16$ le corresponde $y = 4$ por que $2^4 = 16$

Cuando pensamos "a que exponente debemos elevar a 2 para obtener un número determinado estamos buscando el logaritmo en base b de un número a que es igual a un número c, tal que si b elevado al exponente c da como resultado a"

$$\log_b a = c \Rightarrow b^c = a$$

- b es la base del logaritmo y debe ser real positivo y distinto de 1.
- a es el argumento del logaritmo y debe ser real positivo.

Esto se demostrará a través de ejemplos. Siendo a y $b \in R$

1. ¿Qué valores puede tomar la base b?
   a) ¿Qué ocurre si $b = 1$?
   b) ¿Qué ocurre si $b = 0$?
   c) ¿Qué ocurre si b es negativo?
   d) Determinar el valor de c en $c = \log_b a$ para $b = (-3)$ y los siguientes valores de a:

$a1=\frac{1}{9}$ $a2=9$ $a3=27$

2. ¿Qué valores puede tomar el argumento a?
   a) ¿Qué ocurre si $a=0$?
   b) ¿Qué ocurre si a es negativo?

Respuestas a las preguntas anteriores:

1. A través de las respuestas siguientes podrán contestar esta.

a) Si $b=1$

$\log_1 5=c \Rightarrow 1^c=5$

No puede ser por que toda potencia de base 1 es igual a 1, ningún valor de c satisface la condición.

Por lo tanto: $\log_1 5$ es imposible.

Generalizando:

$\log_1 a$ es imposible para $a \neq 1$

b) Si $b=0$

$\log_0 7=c \Rightarrow 0^c=7$

No puede ser por que toda potencia de base 0 es igual a 0, ningún valor de c satisface la condición.

Por lo tanto: $\log_0 7$ es imposible.

Generalizando:

$\log_0 a$ es imposible para cualquier valor de a

c) Si b es negativo.

$\log_{(-3)} \frac{1}{9}=-2 \Rightarrow (-3)^{(-2)}=1$

$\log_{(-3)} 9=2 \Rightarrow (-3)^2=9$

$\log_{(-3)} 27=c \Rightarrow (-3)^c=27$ imposible en el conjunto de los números reales.

Si b es negativo la función toma valores positivos, negativos o imposibles en el conjunto de los números reales.

De estas tres preguntas se llega a la conclusión de que la base b debe ser real, positiva y distinta de uno.

2. A través de las respuestas siguientes podrán contestar esta.

a) $\log_5 0 = c \Rightarrow 5^c = 0$

Ninguna potencia de cinco es cero.

Por lo tanto: $\log_5 0$ es imposible.

Generalizando:

$\log_b 0$ es imposible.

b) $\log_2(-8) = c \Rightarrow 2^c = (-8)$

Como toda potencia de un número positivo es positivo, ningún valor de c cumple esta condición.

Es decir: $\log_2(-8)$ es imposible en el conjunto de números reales.

De estas dos preguntas se llega a la conclusión de que el argumento a debe ser real y positivo.

Ahora volviendo a la gráfica se explicará que se llama función logarítmica de base 2 por que la base tiene el número 2 y se expresa $\log_2 x = y$

Ahora se explicará lo que es un logaritmo natural y un logaritmo decimal:

<u>Definición de logaritmo natural:</u>

Otros logaritmos que se utilizan con mucha frecuencia son los logaritmos naturales (se los escribe $\ln$). Estos logaritmos tienen como base un número especial: el número e, en símbolos:

$\ln x = \log_e x$

<u>Definición de logaritmo decimal:</u>

Cuando la base del logaritmo es 10, los logaritmos se llaman decimales, en ellos no es necesario indicar la base, en símbolos:

$\log x = \log_{10} x$

ACTIVIDAD DE CULMINACIÓN:

Se les dará a los alumnos los siguientes ejercicios, estos se empezaran a realizar en clase y si no alcanza el tiempo, quedaran deber.

1- Calculen aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log 100 =$

b) $\log_7 1 =$

c) $\log_4 64 =$

d) $\log_3 \frac{1}{3} =$

e) $\log_4 2 =$

f) $\log_3 3 =$

g) $\log_{\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{1}{27} =$

h) $\log_5 125 =$

i) $\log_2 \frac{1}{6} =$

j) $\log_{27} 9 =$

PROBLEMAS LOGARÍTMICOS:

La siguiente fórmula corresponde al nivel del ruido que detectada el oído humano:

$$\beta = 10.\log \frac{I}{10^{-12}}$$

el valor 10^{-12}, medido en $\frac{w}{m^2}$ (watt por metro cuadrado) representa la intensidad mínima audible y toma el nombre de *umbral auditivo*, el valor de β (medido en decibeles) es el nivel del ruido, e I es la intensidad del sonido, también medida en $\frac{w}{m^2}$

En esta tabla aparecen los valores de los distintos niveles de ruido en decibeles según fuente emisora de sonido:

Área de silencio(suaves)		
Decibeles	Fuente de sonido	Descripción
0		Umbral de audición(Limite de audibilidad)
10	Respiración normal, Susurro de las hojas de un árbol	Apenas audible.
Área de seguridad(moderados)		
Decibeles	Fuente de sonido	Descripción
30	Murmullo suave. Cuchicheo.	Muy suave.
50	Oficina tranquila. Conversación en voz baja.	Suave.
70	Tráfico pesado. Autopista	Moderado.
Área de peligro(fuertes)		
Decibeles	Fuente de sonido	Descripción
80	Oficina ruidosa. Fabrica de ruido medio.	Irritante
100	Motocicleta. Tren subterráneo.	La exposición constante hace peligrar el oído.
Área de sordera		
Decibeles	Fuente de sonido	Descripción
120	Concierto de rock	Umbral de dolor.
300	Ametralladora. Martillo neumático	Ruidos dolorosos.

1. La intensidad sonora de un trueno es, aproximadamente, de $10\frac{w}{m^2}$,entonces para saber como es detectada por el oído humano reemplazamos en la fórmula dada anteriormente, como sigue:

$\beta = 10.\log\frac{10}{10^{-12}}$ y obtenemos que $\beta =$ ....

2. La intensidad del sonido en una fábrica textil está dada por el siguiente valor promedio: 10^{-4}. Calcular el número de decibeles que detecta el oído humano e indicar la descripción de dicho sonido.
3. Una conversación entre dos personas tiene una intensidad de aproximadamente 3,2*10^{-6} ¿Cuántos decibeles tiene la charla?
4. ¿Cuál es la intensidad del sonido que produce una maquina con un nivel de 80 decibeles?
5. Completar la siguiente tabla:

Nivel de ruido (en decibeles)	0	60	90	125
Intensidad del sonido				